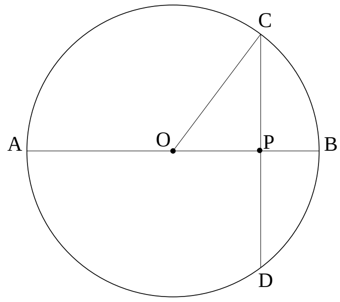
Soluzioni della SIMULAZIONE ESAME DI STATO - 23 Maggio 2011

PROBLEMA 1



Considerata una sfera di diametro $\overline{AB} = 2$, per un punto P di tale diametro si conduca il piano α perpendicolare a esso e si ponga uguale a x la lunghezza di AP.

1. Si calcoli in funzione di x la differenza $d(x)$ fra il volume del cono avente altezza $\overline{AP}$ e base il cerchio sezione di α con la sfera e il volume del segmento sferico avente la medesima base e altezza $\overline{PB}$.
   Si ricorda che il volume del segmento sferico è $V = \pi h^2(r - \frac{h}{3})$, dove r è il raggio della sfera e h l'altezza del segmento sferico.

2. Controllato che risulta:
$$d(x) = \frac{\pi}{3}(2-x)(2x^2 - x - 2)$$
   si studi la funzione $d(x)$, disegnandone il grafico prescindendo dai limiti geometrici sulla variabile x e tracciando l'equazione della retta t tangente a $d(x)$ nel suo punto di flesso F.

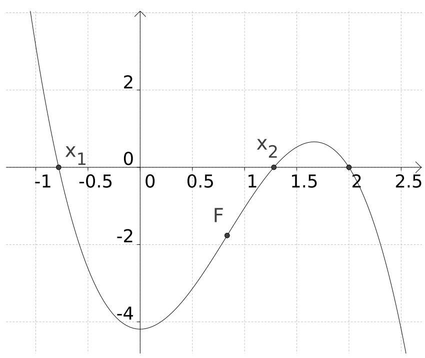
Procedimento
Lo scopo è calcolarsi i volumi del cono che ha come base il cerchio di raggio PC e altezza AP e del segmento sferico di altezza BP. Dovremo quindi esprimere le lunghezze di questi segmenti in funzione dell'incognita assegnata x.

Siccome $P \in AB$ per costruzione, $x \in [0, 2]$. Si ha immediatamente $\overline{AP} = x$ e $\overline{BP} = 2 - x$, per ottenere $\overline{CP}$ si considera il triangolo rettangolo OPC, in cui $\overline{OC} = 1$ e $\overline{OP} = |1 - x|$ (il raggio della sfera è 1), con Pitagora $\overline{CP}^2 = 1 - (1-x)^2 = x(2-x)$. Quindi si ha
$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{CP}^2\,\overline{AP} = \frac{\pi}{3}x^2(2-x) \qquad V_{\text{segm}} = \frac{1}{3}\pi\,(2-x)^2\,(1+x)\ ,$$
da cui facendo $V_{\text{cono}} - V_{\text{segm}}$ si ottiene il risultato.

La funzione $d(x)$ è un polinomio di terzo grado. Quindi è una funzione illimitata, non ha asintoti di nessun tipo. Studiamone il segno. Fortunatamente è già in parte fattorizzata e basterà scomporre il polinomio di secondo grado: $(2x^2 - x - 2) = 2(x - x_1)(x - x_2)$, dove $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$ ($x_1 \simeq -0.78$ e $x_2 \simeq 1.28$). Dallo studio del segno si trova che $f(x) \geq 0$ per $x \leq x_1$ o per $x_2 \leq x \leq 2$ ed è negativa altrove. Ovviamente il grafico della f interseca l'asse delle ascisse in $x = 2, x_1, x_2$.

Studiamone la derivata prima:
$$d'(x) = \frac{\pi}{3}(-6x^2 + 10x) = \frac{2\pi}{3}(-3x^2 + 5) \geq 0\ .$$

Dallo studio del segno si trova $d'(x) = 0$ per $x = 0, \frac{5}{3}$ e $d'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{5}{3}$ e negativa per valori esterni. Cioè ha un massimo relativo in $x = 5/3$ [$f(\frac{5}{3}) = \frac{17\pi}{81}$] e un minimo relativo in $x = 0$ [$f(0) = -\frac{4\pi}{3}$].
Studiamone la derivata seconda:
$$d''(x) = -\frac{2\pi}{3}(6x - 5) = 0\ ,$$
in $x = 5/6$ si ha un flesso [$f(\frac{5}{6}) = -\frac{91\pi}{162}$]. Se ne può ora tracciare il grafico (vedi figura).



La tangente nel punto di flesso ha equazione: $y + \frac{91\pi}{162} = \frac{25}{18}\pi(x - \frac{5}{6})$

3. Si utilizzi questo grafico per calcolare quante soluzioni ammette l'equazione $d(x) = k$ per $x \in [0, 2]$ al variare di k nel campo dei reali.

   Procedimento

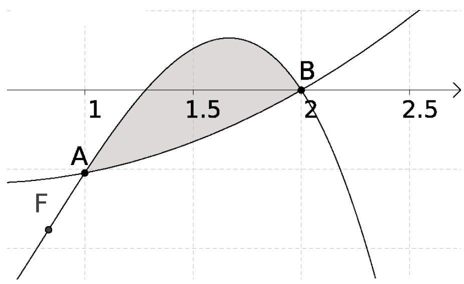
   L'equazione $d(x) = k$ si può discutere graficamente studiando le intersezioni tra il grafico della funzione per $0 \leq x \leq 2$ e la retta orizzontale $y = k$ al variare di k:

   - Se $0 \leq k \leq f(\frac{5}{3}) = \frac{17\pi}{81}$, cioè se è compreso tra 0 e il massimo relativo $f(\frac{5}{3}) = \frac{17\pi}{81}$, si hanno due soluzioni (coincidenti per $k = \frac{17\pi}{81}$).
   - Se $f(0) = -\frac{4\pi}{3} < k < 0$, cioè è compreso tra il minimo relativo $f(0) = -\frac{4\pi}{3}$ e 0, si ha un unica soluzione.
   - Per $k = f(0) = -\frac{4\pi}{3}$ si hanno due soluzioni coincidenti.
   - Per altri valori di k l'equazione non ammette soluzioni.

4. Determinare la parabola γ che interseca il grafico di funzione nei punti di ascissa $x_A = 1$ e $x_B = 2$, tale che l'area della regione piana delimitata da $y = d(x)$ e da γ sia $\mathcal{A} = \frac{\pi}{4}$.

   Procedimento

   La regione di piano in oggetto è quella in figura. Le due curve si devono intersecare nei punti $A(1, -\frac{\pi}{3})$ e $B(2, 0)$. Poniamo queste due prime condizioni.

   - Passaggio per B: la parabola sarà nella forma $y = a(x - b)(x - 2)$.
   - Passaggio per A: $\frac{\pi}{3} = a(1 - b)$, quindi $a = \frac{\pi}{3(1-b)}$.

   La terza e ultima condizione è quella sull'area della regione piana delimitata da γ e da $y = f(x)$:

   $$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}\int_1^2 \left\{(-2x^3 + 5x^2 - 4) - \frac{1}{1-b}\left[x^2 - (b+2)x + 2b\right]\right\} dx$$
   $$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} + \frac{4 - 3b}{6(1-b)}\right]$$
   $$b = -1$$

   Quindi l'equazione della parabola cercata è

   $$y = \frac{\pi}{6}(x+1)(x-2)$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \log(\mathrm{e} + x) & -\mathrm{e} < x < 0 \\ (x + k)\,\mathrm{e}^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

essendo k un parametro reale.

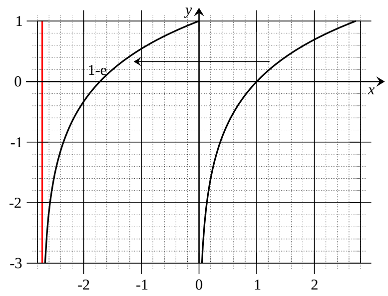
1. Determinare k in modo che la curva γ di equazione $y = f(x)$ risulti continua e verificato che tale valore è $k = 1$ studiare la funzione $f(x)$ tracciandone il grafico in un piano cartesiano xOy.

Procedimento
La f per $x \neq 0$ è continua nel suo dominio, infatti il logaritmo è continuo quando il suo argomento è maggiore di zero e $(x+k)\mathrm{e}^{-x}$ è continua perché è prodotto di due funzioni continue. Analiziamo quindi il punto di congiunzione $x = 0$: per determinare il valore di k si deve imporre la condizione di continuità, cioè che il limite esista e sia uguale al valore della funzione in $x = 0$ (ossia $f(0) = k$). Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+k)\mathrm{e}^{-x} = k$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \log(\mathrm{e}+x) = \log(\mathrm{e}) = 1 \ ,$$

quindi per la condizione di continuità è necessario imporre l'uguaglianza dei limiti destro e sinistro e si trova che per $k = 1$ $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ e la funzione risulta continua.

La funzione per $x < 0$ è la funzione logaritmica traslata orizzontalmente di un vettore $\vec{v} = (-\mathrm{e}, 0)$ (vedi fig.), con un asintoto verticale $y = -\mathrm{e}$. Per $\forall x \geq 0$ si ha che $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, quindi $y = 0$ è l'asintoto orizzontale.



Procediamo al calcolo della derivata prima, si ha:

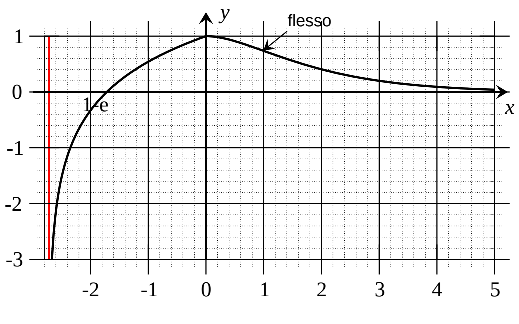
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}+x} & -\mathrm{e} < x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} + (x+1)(-\mathrm{e}^{-x}) = -x\,\mathrm{e}^{-x} & x \geq 0 \ , \end{cases}$$

che si annulla solo in $x = 0$. Sappiamo che la f per $k = 1$ è continua in $x = 0$, studiamone la derivabilità, facendo il limite destro e sinistro di $f'(x)$ per $x \to 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\mathrm{e}+x} = \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1} \ ,$$

quindi, poiché $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ sono finite e diverse tra loro, in $x = 0$ la funzione presenta un punto angoloso. La tangente sinistra ha equazione $y - 1 = \mathrm{e}^{-1}x$ e quella destra $y = 1$

Inoltre $\forall x > 0$ si ha che $f'(x) < 0$, dato che l'esponenziale è una funzione a valori positivi, quindi la funzione è strettamente decrescente. Calcolando $f''(x)$ possiamo determinare eventuali punti di flesso:
$f''(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\text{flesso}} = 1.$
Si può quindi tracciare il grafico della $f(x)$ unendo i grafici per $x < 0$ e per $x \geq 0$. (vedi figura)



2. Definito l'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2011}, \frac{\pi}{2011}]$, determinare se $f(x)$ in I verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange e in caso affermativo calcolare l'ascissa x_0 che soddisfa la tesi di tale teorema.

   Procedimento
   La funzione in $x = 0$ non è derivabile come visto nel punto precedente e quindi non è derivabile in I. Le ipotesi del teorema di Lagrange non sono soddisfatte.

3. Dopo aver verificato che la funzione è invertibile $\forall x \geq 0$, motivando la risposta, stabilire se la funzione inversa di tale restrizione è derivabile in tutto il suo dominio.

Procedimento
Per $x \geq 0$, la funzione è strettamente monotona (decrescente), quindi la restrizione $g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ per $x \geq 0$ è biunivoca e quindi invertibile. Per quanto riguarda la derivabilità, detta $g^{-1}(y)$ la funzione inversa, ricordiamo che

$$D\left[g^{-1}(y_0)\right] = \frac{1}{D\left[g(x_0)\right]} \ ,$$

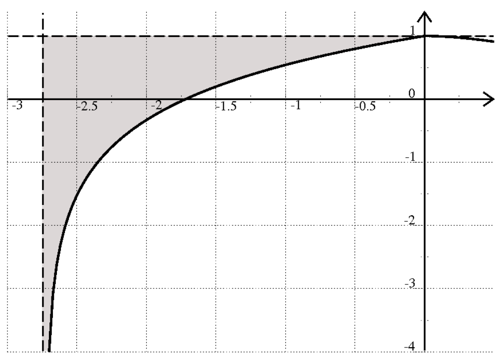
dove $y_0 = g(x_0)$ e che, per il teorema di de L'Hôpital, il limite del rapporto incrementale è uguale al limite della derivata. Poiché $D\left[g(0)\right] = 0$ e $y_0 = g(0) = 1$, si ha che

$$\lim_{y \to 1^-} D\left[g^{-1}(y)\right] = -\infty \ .$$

Quindi concludiamo che $g^{-1}(y)$ non è derivabile in $y = 1$ poiché il limite del rapporto incrementale non è finito.

4. Detto A il punto di intersezione della curva $y = f(x)$ con l'asse delle ordinate, determinare l'area di piano delimitata da $y = f(x)$, dal suo asintoto verticale e dalla retta orizzontale passante per A.

Procedimento
L'asintoto verticale della funzione è come visto nello studio della funzione $x = -e$, la regione di piano in oggetto è percui quella evidenziata in figura. Per rispondere a questo punto si hanno due possibilità:



(a) trovare la primitiva di $y = \log(x+1)$, mediante un'integrazione per parti, è quindi usarla per calcolare l'integrale definito

$$\int_{-e}^{0} [1 - \log(x + \mathrm{e})]\, dx \ ; \tag{1}$$

(b) accorgersi che la regione di piano descritta è equivalente a quella compresa tra la curva $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$ e le rette $y = -e$ e $x = 1$, infatti, considerando una riflessione rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (che analiticamente corrisponde allo scambio di x con y), l'asintoto $x = -e$ è trasformato nella retta $y = -\mathrm{e}$, il punto $A(0,1)$ va in $A'(1,0)$ e la curva $y = f(x)$ va in $x = f(y)$ cioè in $y = f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$. Si ha quindi

$$\int_{-e}^{0} \log(x + \mathrm{e})\, dx = \int_{-\infty}^{1} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}) - (-\mathrm{e})\, dx = \int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^x\, dx \tag{2}$$

Dato che fare l'integrale (2) è di gran lunga più semplice di quello (1), useremo il metodo (b) (ovviamente il risultato non dipende dal metodo usato). L'area della regione evidenziata in figura è

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^x\, dx = \left[\mathrm{e}^x\right]_{-\infty}^{1} = \mathrm{e}^1 - \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}$$