Analisi dimensionale

Appunti ed esercizi per il corso di fisica

29 settembre 2011

Tra le grandezze fisiche si possono distinguere le grandezze fondamentali e le grandezze derivate. Questa divisione non ha ragioni scientifiche, piuttosto ha un'origine sostanzialmente storica.

Fin dall'antichità è risultato "naturale" considerare fondamentali grandezze come la **lunghezza**, il **tempo** e la **massa** perché da sempre sono risultate quelle più facilmente e direttamente misurabili dall'uomo (vedi tabella). Per misurare una supeficie di un campo rettangolare, per esempio, è più semplice misurare la lunghezze dei due lati e quindi *derivare* l'area del rettangolo.

nome	***simbolo***	***unità di misura nel S.I.***
lunghezza	ℓ	m
tempo	t	s
massa	m	kg

Tabella 1: Grandezze fondamentali usate nella descrizione dei fenomeni meccanici con i relativi simboli e unità di misura nel Sistema Internazionale

Quindi si chiamano grandezze fisiche derivate le grandezze che si possono ricavare a partire dalle grandezze fisiche fondamentali. Seguendo l'esempio di prima si ha che una superfice S si può ricavare moltiplicando due lunghezze, in formule si scrive:

$$[S] = [\ell] \cdot [\ell] = \left[\ell^2\right] \ .$$

Questo qui sopra è un esempio semplice di *analisi dimensionale*, dove le parentesi quadre sono la notazione per indicare che ci stiamo occupando specificatamente delle dimensioni fisiche della grandezza, cioè ci interessa solo sapere che S è una superficie e che si può esprimere come una lunghezza al quadrato e **non** il valore della grandezza che stiamo analizzando.

Per capire meglio svolgiamo insieme alcuni esercizi.

Esecizi svolti

1. Analisi dimensionale del *volume* di un parallelepipedo i cui lati misurano rispettivamente a, b e c.
   Il volume del parallelepipedo è dato dalla formula $V = a \cdot b \cdot c$, quindi eseguiamo l'analisi dimensionale:
   $$[a] = [b] = [c] = [\ell] \ ,$$
   che si legge "le dimensioni di a sono uguali a quelle di b e di c e sono le dimensioni di una **lunghezza**". Le dimensioni del volume allora si trovano nel seguente modo
   $$[V] = [a \cdot b \cdot c] = [\ell] \cdot [\ell] \cdot [\ell] = \left[\ell^3\right] \ ,$$
   cioè le dimensioni del volume sono quelle di una lunghezza al cubo.

2. Analisi dimensionale della *densità*.
   La densità di un oggetto di volume V e massa m è data dalla formula $d = \dfrac{m}{V}$, quindi eseguiamo l'analisi dimensionale, sfruttando il risultato precedente, cioè $[V] = [\ell^3]$, e il fatto che m è una massa, cioè $[m] = [m]$:
   $$[d] = \left[\frac{m}{V}\right] = \left[\frac{m}{\ell^3}\right] = \left[m \cdot \ell^{-3}\right] \ ,$$
   dove l'ultimo passaggio è facoltativo.

3. Verificare le seguenti uguaglianze dimensionali (*in questo tipo di esercizi è necessario esprimere tutte le grandezze in termini delle grandezze fondamentali e confrontare le due parti dell'uguaglianza*):

   (a) $[d \cdot L] = \left[m \cdot \ell^{-2}\right]$ dove d è una densità.

   La parte destra dell'uguaglianza è già espressa in termini di grandezze fondamentali, svolgiamo quindi solo la parte sinistra sfruttando il risultato per la densità ottenuto nell'esercizio 2.
   $$[d \cdot L] = \left[\frac{m}{\ell^3} \cdot L\right] = \left[\frac{m}{\ell^2}\right] = \left[m \cdot \ell^{-2}\right] \ ,$$
   confrontando questo risultato con la parte destra dell'equazione si osserva che l'uguaglianza è verificata.

   (b) $\left[d \cdot v^2\right] = \left[m \cdot \ell^{-1} \cdot t^{-1}\right]$ dove v è una lunghezza diviso un tempo: cioè $[v] = \left[L \cdot t^{-1}\right]$.

$$\left[d \cdot v^2\right] = \left[\frac{m}{\ell^3} \cdot \frac{\ell^2}{t^2}\right] = \left[\frac{m}{L} \cdot \frac{1}{t^2}\right] = \left[m \cdot \ell^{-1} \cdot t^{-2}\right] \;,$$

confrontando questo risultato con la parte destra dell'ugualgianza si osserva che l'uguaglianza non è verificata.

Esecizi per casa

1. Per ottenera la velocità media v_m si misura lo spazio percorso s e si divide per il tempo t impiegato a percorrerlo. Svolgi l'analisi dimensionale della velocità media v_m.

2. Una famosa equazione di Einstein $E = m\,c^2$ lega l'energia E alla massa m e alla velocità della luce c (le cui dimensioni sono quelle di una lunghezza diviso un tempo). Svolgi l'analisi dimensionale di E.

3. Verifica se le seguenti uguaglianze dimensionali sono vere o false.
   (a) $\left[\dfrac{s}{v_m}\right] = [t]$, dove s è una lunghezza e v_m è una velocità.
   (b) $\left[\dfrac{d}{m}\right] = \left[\ell^3\right]$, dove d è una densità e m una massa.
   (c) $\left[d \cdot A^2\right] = \left[m \cdot \ell^{-1}\right]$, dove d è una densità e A è una superficie.
   (d) $\left[\ell^2\right] = \left[v_m^2 \cdot t^2\right]$, dove t è un tempo e v_m è una velocità.

Soluzioni

1. $[v_m] = \left[L \cdot t^{-1}\right]$
2. $[E] = \left[m \cdot \ell^2 \cdot t^{-2}\right]$
3. (a) vera
   (b) falsa
   (c) falsa
   (d) vera