NOTE sulle ISOMETRIE

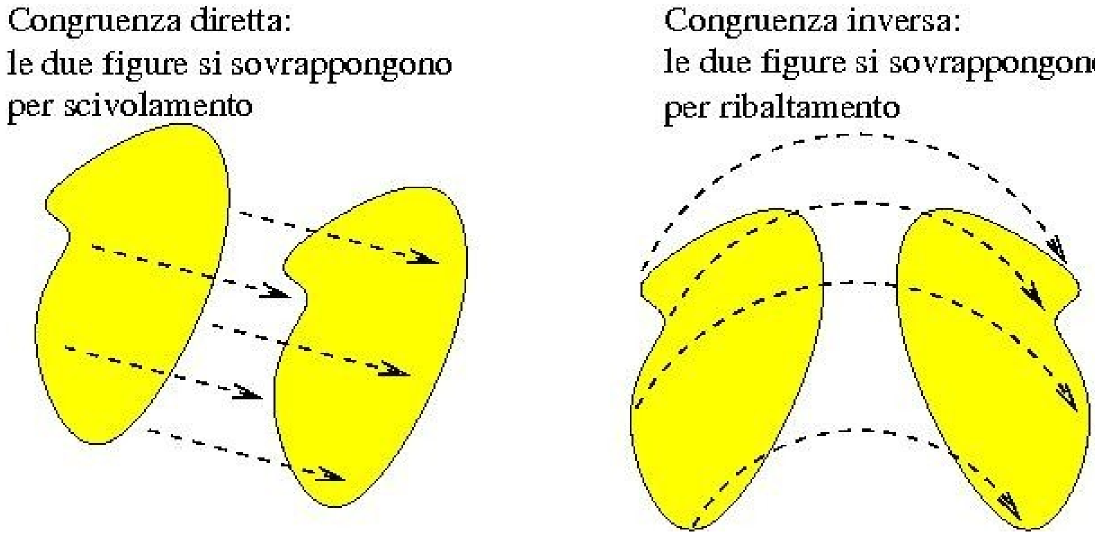
a cura di Sara Bacci e Gabriele Cecchin III F

04/11/09

Introduzione

Prima di analizzare le isometrie è necessario fare una breve introduzione.

Bisogna innanzitutto ricordare che due figure si dicono congruenti se esse possono essere sovrapposte e la congruenza è detta **diretta** se esse possono essere sovrapposte con uno scivolamento, **inversa** se deve essere fatto un ribaltamento.



Parlando di isometria, si fa invece riferimento a una **trasformazione geometrica,** la quale ha la caratteristica di essere una applicazione biiettiva nel piano, ovvero in grado di stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti: ad ogni punto della figura di partenza corrisponde uno ed un solo punto della figura ottenuta.

Isometrie

In base a quelle che è stato detto sopra, si definisce isometria una trasformazione f di un qualsiasi piano π in sé (cioè tra i punti del piano) che conserva la distanza tra punti, cioè $\forall\ P \in \pi$ e $\forall\ Q \in \pi$ $f(P) = P'$ e se $f(Q) = Q'$ allora $d(P,Q) = d(P',Q')$.

Fra le isometrie ci concentreremo sulle seguenti:

1. Rotazione
2. Traslazione
3. Simmetria Assiale
4. Simmetria Centrali

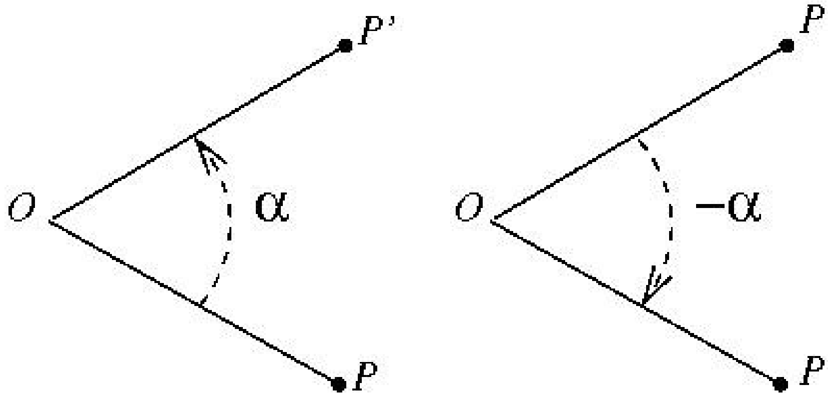
Prima di entrare nello specifico vengono date due definizioni, che saranno utili durante tutto il seguito:

- Assegnata una trasformazione f del piano in sé, si definisce unito o fisso ogni elemento del piano che nella trasformazione f' ha per immagine se stesso
- Ogni trasformazione f ammette la sua inversa, cioè la trasformazione che dal punto trasformato $P' = f(P)$, torna in P. La trasformazione inversa si indica con f^{-1}, quindi per come l'abbiamo definita si ha $f^{-1} \cdot f(P) = f^{-1}(P') = P$.
- Una trasformazione f si definisce involutoria se composta con se stessa (cioè applicata due volte consecutivamente) genera la trasformazione identica, cioè, in simboli, se $\forall\ P \in \pi \quad f \cdot f(P) = P$

  Una trasformazione f è invece identica quando ogni punto si trasforma in se stesso, cioè $f(P) = P$

La Rotazione

E' definita rotazione un movimento per cui tutti i punti di una figura subiscono spostamenti uguali su archi di circonferenze concentriche, ruotando gli stessi raggi nello stesso verso di un angolo dato (α). La rotazione è definita esclusivamente quando sono assegnati centro (O) e ampiezza dell'angolo (α) e si indica con il simbolo $R_{O,\alpha}$. Si parla di angolo α facendo riferimento alla rotazione introno ad *O* (centro di rotazione) che porta P sul suo corrispondente, in questo caso P′ .



Se la rotazione avviene in senso antiorario (come nella figura a sinistra) si parla di un angolo positivo (indicato con $R_{O,\alpha}$), se invece la stessa rotazione avviene in senso orario (come nella figura a destra) si parla di angolo negativo (indicato con $R_{O,-\alpha}$). Essendoci tra il punto di partenza e il punto ottenuto mediante la traslazione una corrispondenza biunivoca (come detto nella definizione di isometria), allora al punto *P* corrisponderà uno e un solo punto *P'*; lo stesso concetto può essere applicato nella tra formazione che porta *P'* su *P*. Quindi applicando a una rotazione la sua inversa (ovvero ruotando da *P'* a *P*) ritroviamo il punto iniziale. Data la rotazione $R_{O,\alpha}$, la rotazione inversa $R^{-1}_{O,\alpha}$ è quella di centro *O* e angolo -α: in forma sintetica si può quindi scrivere $R^{-1}_{O,\alpha} = R_{O,-\alpha}$.

Proprietà della rotazione

1. La rotazione ha un solo punto unito, il punto O.
2. A ogni figura corrisponde una figura ruotata direttamente uguale (vedi corrispondenza diretta e inversa).
3. Essa in generale non è involutoria, esclusi due casi:
   a) con l'angolo $\alpha = 0°$ poiché nessun punto è spostato e come detto tutti rimangono uniti e si ha un'identità. (o trasformazione identica);
   b) con l'angolo $\alpha = \pm\ 180°$, poiché compiere due rotazioni successive di 180° equivale a una rotazione completa di un angolo giro, cioè ogni punto dopo la rotazione completa torna dove era prima della rotazione.

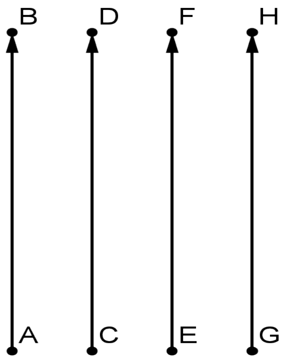
La Traslazione

Per poter applicare la traslazione è necessario, come presupposto, sapere cosa siano i vettori.

Vettori:

Dati due punti *A* e *B* nel piano si definisce segmento orientato $\overrightarrow{AB}$, il segmento definito dai punti *A* e *B* percorso da *A* verso *B* (non è definito solo dalla retta *AB* e dalla lunghezza $\overline{AB}$, ma anche dall'orientazione da *A* verso B).

Si prenda in esame l'insieme dei segmenti orientati in figura:



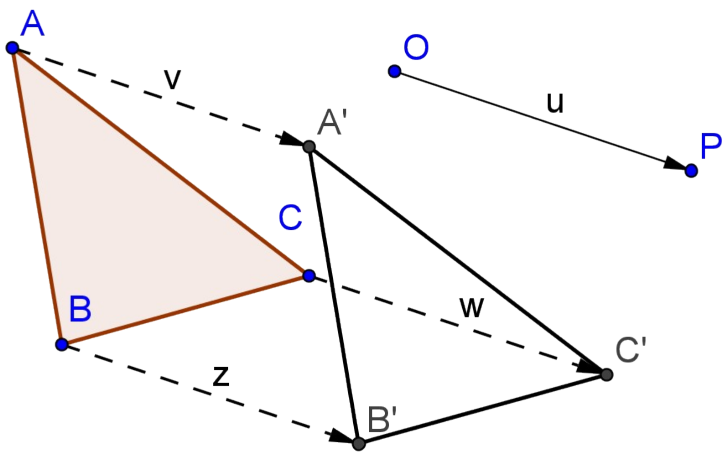
Si può definire una <u>relazione</u> che li associa considerando le seguenti proprietà:

- hanno la stessa direzione, cioè appartengono a rette parallele
- hanno lo stesso verso, cioè lo stesso orientamento sulla retta
- hanno la stessa lunghezza o modulo

Tale relazione prende il nome di <u>relazione di equipollenza</u> e i segmenti orientati che corrispondono a questa stessa relazione si dicono <u>equipollenti</u>.
Quando si parla di vettore non si indica il solo segmento orientato (per esempio solo $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{CD}$, ecc.), ma bensì con questo termine si fa riferimento a tutto l'insieme di segmenti del piano orientati aventi tutti le proprietà sopra citate, ovvero direzione, verso e modulo.
Due vettori o più con stessa lunghezza, stessa direzione, ma verso opposto sono detti <u>opposti</u>. L'opposto del vettore $\vec{v}$ si indica con $-\vec{v}$.
Per indicare il vettore si usa il simbolo $\vec{v}$. "*v*" senza la freccia sopra indica solo la distanza fra i due estremi del vettore.

<u>Traslazione</u>:

Si dice traslazione un movimento per cui tutti i punti del piano subiscono spostamenti uguali in lunghezza, verso e direzione. Per esempio il triangolo in figura è traslato del vettore $\overrightarrow{OP}=\vec{u}$ e tale traslazione si indica con il simbolo $T_{\vec{u}}$.

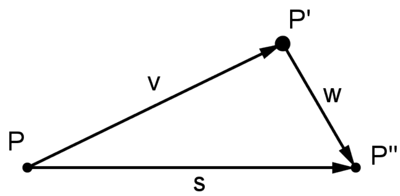


Se *O* e *P* coincido il vettore è di conseguenza <u>nullo</u> e tutti i punti della trasformazione coincidono (come già ripetuto si dicono <u>uniti</u>) e si ha un <u>identità.</u> Se invece lo stesso vettore non è nullo (cioè *O* e *P* non coincidono, così come *A* e *A'* etc.) allora la traslazione non ha alcun punto unito.
Occupandosi delle traslazioni <u>non identiche</u> ricaviamo le seguenti proprietà:

1. Tutte le rette parallele al vettore $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$ vengono trasformate in se stesse e quindi si parla di rette <u>unite</u>; i punti (A, A'; B, B'; C, C') non sono invece uniti poiché escludendo l'identità essi sono sempre distinti.
2. A ogni figura corrisponde una <u>figura traslata direttamente uguale</u>. (vedi corrispondenza diretta e inversa)
3. A ogni segmento traslato ne corrisponde un altro <u>parallelo e congruente</u> (*AB = A'B'* etc.)
4. La traslazione è <u>una corrispondenza non involutoria,</u> poiché essa avviene sempre nella stessa lunghezza, nello stessa direzione, nello stesso verso e quindi un punto non verrà mai trasformato in sé stesso. Infatti dato il vettore:

5. Una <u>traslazione *inversa*</u>, indicata col simbolo $\left(T_{\vec{u}}\right)^{-1}$ *,* è una traslazione il cui vettore ha stessa lunghezza e direzione, ma verso opposto a quello di partenza (vedi vettore opposto), cioè $\left(T_{\vec{u}}\right)^{-1}=T_{-\vec{u}}$

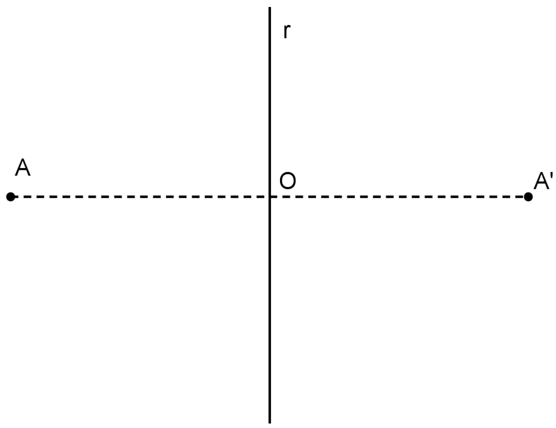
Riferendosi alla proprietà citata nel punto 4 è da fare una precisazione:



Se, come in questo caso, si combinano due traslazioni di vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ la traslazione completa è quella definita dal <u>vettore somma</u> (indicato qui sopra con $\vec{s}$). Per sommare due vettori basterà portare la "coda" del secondo sulla "punta" del primo (vedi figura sopra).

La simmetria assiale

Dato nel piano una retta *r*, detta asse di simmetria, e due punti *A* e *A'* essi si dicono simmetrici rispetto a *r* se e solo se il segmento che li congiunge (<u>*AA'*</u>) è <u>perpendicolare</u> all'asse e <u>diviso in due parti uguali</u> da *r*. Questo tipo di trasformazione si dice simmetria assiale di asse *r* e si indica con S_r.
Dal momento che al punto *A* corrisponderà sempre il suo simmetrico *A*' e ad *A*' corrisponderà sempre il suo simmetrico *A*, allora otteniamo una <u>corrispondenza biunivoca</u> fra punti. Inoltre ciò comporta che la trasformazione diretta (da *A* a *A'*) è identica alla sua inversa (da *A*' e *A*) e quindi ci troviamo di fronte anche a <u>una corrispondenza involutoria</u>.
Si definisce di conseguenza <u>simmetria assiale</u> quella corrispondenza biunivoca ed involutoria che fa corrispondere a un qualunque punto del piano il suo simmetrico rispetto all'asse *r.*

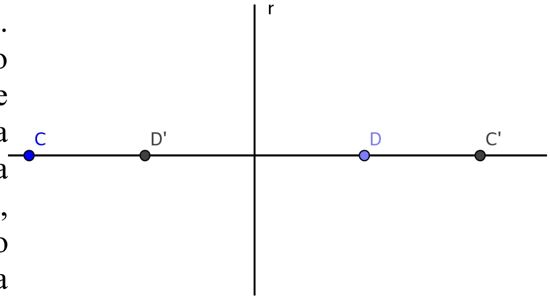


Proprietà della simmetria assiale

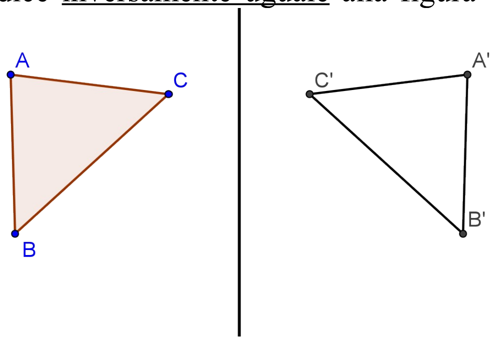
1. La simmetria assiale S_r è una trasformazione involutoria, cioè la trasformazione inversa di S_r è S_r stessa: $S_r^{-1} = S_r$.

2. Se un punto A si trova sull'asse coinciderà sicuramente con il suo simmetrico A' e quindi ogni $A \in r$ (ogni punto A appartenente all'asse della simmetria) è un punto unito di S_r. Di conseguenza tutti i punti di r sono uniti e lo stesso asse prenderà il nome di retta unita.

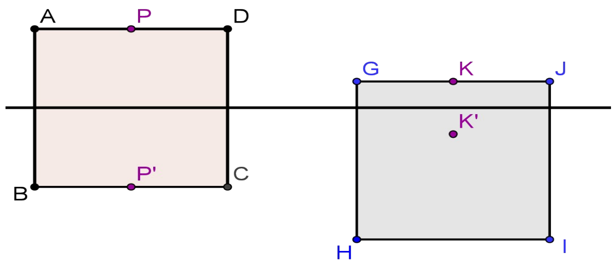
3. L'asse della simmetria non è l'unica retta unita. Poiché in una simmetria assiale a ogni punto appartenente a una retta perpendicolare all'asse corrisponde un punto simmetrico appartenente a sua volta alla stessa retta, allora qualunque retta perpendicolare all'asse corrisponderà a se stessa, cioè è una retta unita. Tuttavia, a differenza del caso precedente non è conservata l'orientazione (nella figura C è a sinistra di D, mentre C' è a destra di D').



4. Riferendosi alla figura qui accanto, la figura ABC si dice inversamente uguale alla figura $A'B'C'$: infatti due figure si dicono direttamente uguali quando sono direttamente sovrapponibili mediante uno scivolamento, mentre, come accade nella simmetria assiale, si dicono inversamente uguali quando sono sovrapponibili attraverso un ribaltamento. Ad esempio basta pensare alle mani del corpo: queste nonostante siano uguali non sono sovrapponibili mediante uno scivolamento su un piano, ma richiedono un ribaltamento fuori dal piano a cui appartengono.

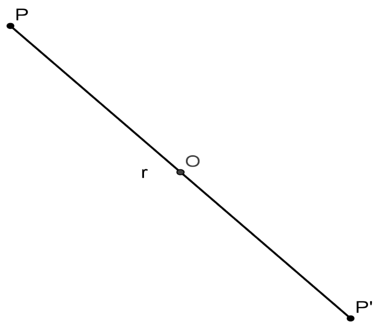


5. Una figura F ammette una retta r come asse di simmetria se e solo se a ogni punto P della figura corrisponde un simmetrico P'.



Domanda: sai elencare almeno 5 figure geometriche piane che hanno un'asse di simmetria?

La simmetria centrale



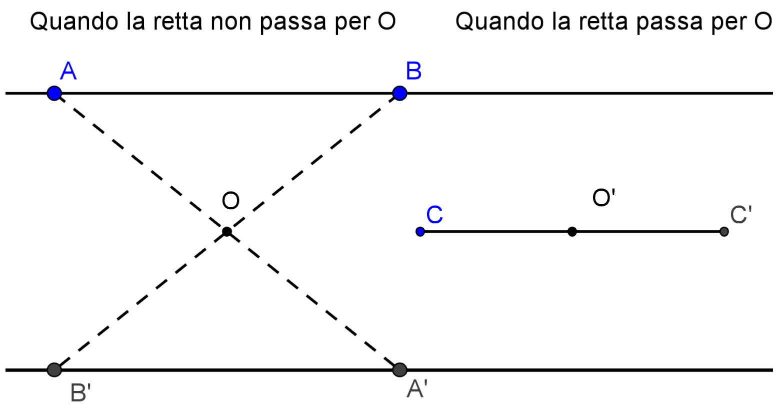
Dato su un piano qualsiasi un generico punto P e un punto O si definisce simmetria centrale di centro O la trasformazione che associa al suddetto punto P un punto P', allineato con P e O, tale che $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e il corrispondente di O sia il punto O stesso. In linguaggio matematico la simmetria centrale di centro O è espressa con C_o.

In simboli ciò sarebbe espresso attraverso questo linguaggio: $\forall\ P \in \pi$ con $P \neq$ O la simmetria centrale di centro O è la corrispondenza C_o: $P \rightarrow P'$ tale che $O \in PP'$ e $\overline{OP} = \overline{OP'}$ inoltre si ha C_o: $O \rightarrow O$

Nella simmetria centrale fra la figura di partenza e la figura trasformata vi è uguaglianza diretta.

Proprietà della simmetria centrale

1. L'unico punto unito di C_o è il centro O.
2. Soltanto le rette passanti per il centro sono rette unite, se tale retta *r* contiene sia *P* che *O* allora gli apparterrà anche *P'* essendo per definizione allineato con *P* e *O*. Inoltre, se *r* contiene *P* e *P'*, essa deve passare sicuramente per *O* , infatti gli stessi *P* e *P'* per definizione di C_o devono essere sempre allineati con *O*.



3. A ogni segmento o retta ne corrisponde un altro parallelo e congruente simmetrico rispetto a un punto *O* (*AB* = *A'B'*, etc.). Tuttavia a differenza della traslazione non è conservata l'orientazione del segmento (osservando la figura sopra, *A* è a sinistra di *B*, mentre *A'* è a destra di *B'*).
4. Essendo la simmetria centrale equivalente a una rotazione di 180°, due figure che si corrispondono con una simmetria centrale sono direttamente uguali.
5. Per lo stesso motivo del punto precedente la simmetria centrale è involutoria: $C_o^{-1} = C_o$
6. Si dice che il centro *O* è centro di simmetria di una figura se e solo se ogni punto della figura ha per simmetrico rispetto a *O* un punto appartenente alla figura.

Domanda: sai elencare almeno 5 figure geometriche piane che hanno un centro di simmetria?