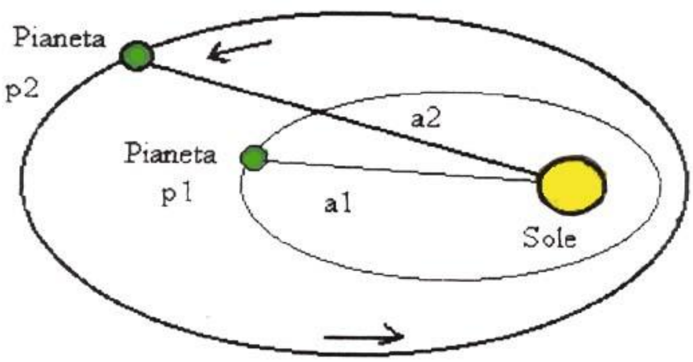
Teoria della gravitazione universale

note tratte dalle lezioni del Prof. Fubini
a cura di Edoardo Lippi e Chiara Sarti IV F (a.s.2010/2011)

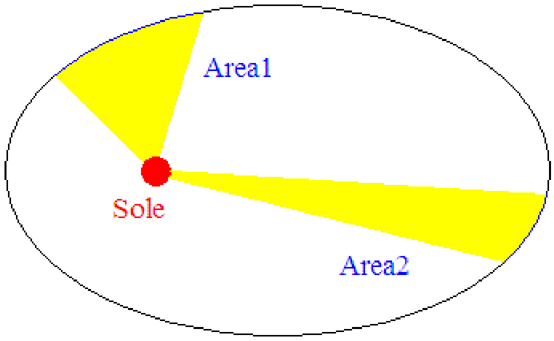
Da Tolomeo a Keplero

La teoria della gravitazione universale, riguardante la tendenza dei corpi a cadere, è stata una delle prime leggi ad essere teorizzata ed ha una storia molto interessante che trova le sue radici nell'antico mondo greco.
Già Tolomeo durante l'età ellenistica aveva costruito un sistema geocentrico, detto poi "modello tolemaico", che rendeva conto di tutti i movimenti planetari osservati: secondo l'astronomo la luna, il sole e i pianeti fino ad allora conosciuti descrivevano con il suo movimento un'orbita circolare, avente per centro la Terra.
Molti secoli dopo, Niccolò Copernico (1473-1543) divulgò l'idea dell'eliocentrismo, riprendendo e rielaborando teorie già presenti nel IV e III secolo a.c., secondo le quali il moto dei pianeti e del sole nel cielo poteva essere spiegato ipotizzando che tutti i pianeti, insieme alla terra, ruotassero intorno al sole e che la terra ruotasse su se stessa. Questa idea rappresentò una profonda rivoluzione nella concezione del cosmo che sembrò inconciliabile con il principio filosofico e religioso della centralità dell'uomo nell'universo. Per questo motivo, la teoria Copernicana non ebbe un grande seguito tra gli studiosi dell'epoca e fu ulteriormente ridimensionata in seguito alla condanna di Galileo Galilei da parte della Chiesa per eresia e la successiva abiura delle proprie teorie nel 1633.
Un astronomo di nome Tycho Brahe (1546-1601) capì che i progressi in ambito astronomico richiedevano osservazioni sistematiche e rigorose del cielo utilizzando i più sofisticati strumenti dell'epoca. Egli fece costruire su un isola di Hven (nel golfo di Botnia), datagli in dono dal re di Danimarca Federico II, un osservatorio astronomico molto moderno per la sua epoca: il re di Danimarca investì nel progetto di Tycho l'equivalente del 1% del PIL del proprio paese per consentire allo scienziato di portare avanti il proprio progetto.
Per 20 anni ogni notte, aiutato da oltre 100 assistenti, egli osservò e misurò il moto delle stelle e dei pianeti attraverso strumenti di misura dell'epoca, giungendo nel corso della sua vita a catalogare oltre mille stelle e ad annotare migliaia e migliaia di dati.
Tutti questi dati vennero poi raccolti e giunsero in mano a uno dei collaboratori di Tycho, Johannes Kepler, (latinizzato in Keplero, 1571-1630), il quale cercò di analizzare il tipo di movimento che i pianeti compivano intorno al sole. Analizzando i dati raccolti da Brahe, Keplero trovò tre leggi, dette "leggi di Keplero".

- Prima legge: il moto dei pianeti osservato dalla terra poteva essere compreso se si ammetteva che *tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche, di cui il sole è uno dei fuochi.*



- Seconda legge: Keplero si accorse che se si segna la posizione del pianeta in due istanti, separati da un certo intervallo di tempo, poi in un altro punto sulla sua orbita si segnano di nuovo due posizioni ancora separate dallo steso intervallo di tempo, e si tracciano le rette (tecnicamente chiamate raggi vettori) dal sole al pianeta, l'area compresa tra l'orbita del pianeta e le due rette definite dalla posizione del pianeta a distanza di uno stesso arco di tempo (evidenziato in giallo nella figura) è uguale in qualsiasi parte dell'orbita. Di conseguenza il pianeta deve muoversi più velocemente quando è vicino al sole e più lentamente quando è lontano, in modo da spazzare esattamente la stessa area. Riassumendo, *il vettore che unisce il sole al pianeta spazia aree uguali in tempi uguali.*



- Keplero trovò poi una terza legge, che non riguardava solo il moto di un pianeta singolo intorno al sole, ma dava una relazione fra i movimenti dei vari pianeti. Questa legge afferma che il tempo che un pianeta impiega per girare intorno al sole dipende dalla dimensione dell'orbita e che i tempi variano come la radice quadrata del cubo della dimensione dell'orbita, dove per dimensione dell'orbita si intende il semiasse maggiore dell'ellisse. Quindi giunse a questa formula:

$$K = \frac{T^2}{d^3}$$

Dove K è uguale a una costante, uguale per tutti i pianeti del sistema solare, T rappresenta l'orbita e d il semiasse maggiore dell'ellisse.

Queste leggi di Keplero danno una descrizione completa del moto dei pianeti intorno al sole, interpretando così i dati raccolti da Tycho Brahe.

Le cause del moto dei pianeti

La domanda successiva era questa: che cosa fa girare i pianeti intorno al sole?
Questa fu una delle domande che mosse Isaac Newton (1643-1727) nella sua opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica ("I principi matematici della filosofia naturale"),* nella quale egli enunciò il principio delle ***leggi della dinamica*** e della ***gravitazione universale.*** Galileo, studiando precedentemente le leggi del moto degli oggetti che stanno sulla terra, aveva già teorizzato un principio denominato da lui *principio di inerzia,* il quale afferma che se su un oggetto non agisce alcuna forza, esso permarrà nel suo stato di moto restando in quiete o procedendo con velocità costante in linea retta. Newton fece il passo seguente: perché un corpo cambi la sua velocità, c'è bisogno di una forza *(prima legge della dinamica).* In seguitò pronunciò anche le seguenti leggi della dinamica, le quali stabiliscono che:

- $\vec{F} = m\vec{a}$ (Forza uguale massa per accelerazione)
- Legge di azione e reazione: *se un corpo **1** esercita una forza su un corpo **2**, allora **2** eserciterà su di **1** la stessa forza uguale e contraria.*

$$\vec{f}_{2\to1} = -\vec{f}_{1\to2}$$

Newton ipotizzò che queste leggi fossero valide anche per le forze che agiscono fra pianeti; alla luce di ciò, egli collegò le leggi di Keplero con le leggi della dinamica da lui enunciate.
Le osservazioni astronomiche relative al moto dei pianeti, riassunte da Keplero in tre sintetiche leggi, furono il punto di partenza dei ragionamenti che portarono Newton a formulare l'espressione corretta per la forza di gravitazione che mutuamente si esercita fra due corpi dotati di massa. Successivamente la teoria di Newton fu confortata anche da esperimenti eseguiti in laboratorio da Hanry Cavendish nel 1797-98.
Partendo dalle leggi di Keplero e guidato dalla convinzione che i fenomeni della natura siano regolati da leggi universali, Newton trovò che i corpi celesti interagiscono con una forza direttamente proporzionale alla loro masse e inversamente proporzionale al quadrato delle loro distanze.

Dal moto dei pianeti alla legge di gravitazione

Per giungere dal moto dei pianeti alla legge di gravitazione universale seguiremo il ragionamento di Newton supponendo, per semplicità, che le orbite descritte dai pianeti intorno al sole siano circolari anziché ellittiche e adattando a questo caso gli enunciati delle leggi di Keplero.
Ricordando le tre leggi di Keplero espresse nel paragrafo precedente:

1. i pianeti compiono, nel loro moto intorno al Sole, orbite piane di forma ellittica, di cui il Sole occupa uno dei fuochi. Adattandolo al caso di orbite circolari:
   i pianeti descrivono orbite circolari aventi al centro il Sole;
2. il raggio vettore (ossia il segmento che collega un pianeta al Sole), scelto con origine nel Sole, spazza aree uguali in tempi uguali. Adattandolo al caso di orbite circolari:
   il moto dei pianeti è uniforme;
3. per i vari pianeti è costante il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione *T* e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita *a*. Adattandolo al caso di orbite circolari:
   i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono direttamente proporzionali ai cubi dei raggi delle loro orbite.

Ricorda!
Il **moto circolare uniforme** è un esempio di **moto periodico**: un moto che si ripete nel tempo con le stesse proprietà. Sono periodici i moti di rotazione e di rivoluzione della Terra, l'oscillazione di un periodo, il battito del cuore. Il minimo intervallo di tempo dopo il quale un moto periodico si ripete è detto **periodo [*T*]**.

La velocità istantanea *v* di un punto materiale su una traiettoria circolare è un vettore tangente alla traiettoria (figura a). Nel moto circolare uniforme il vettore velocità varia da un istante all'altro, ma il suo modulo *v* è costante. Essendo

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

in cui Δl è uguale ad un arco di circonferenza percorso in Δt, e considerando che per percorrere l'intera circonferenza 2πr serva un intervallo di tempo uguale al periodo *T* del moto, possiamo scrivere

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Dal momento che durante il moto circolare il modulo di v rimane costante ma la direzione del vettore v cambia continuamente vuol dire che interviene nel moto un'accelerazione chiamata accelerazione centripeta:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Dalle prime due leggi, ossia dal moto circolare uniforme che i pianeti fanno intorno al Sole, si deduce che i pianeti possiedono un'accelerazione centripeta e quindi sono soggetti ad una forza centripeta orientata verso il Sole. Consideriamo un pianeta di massa *m*, in moto con periodo *T*, con una velocità di modulo *v* costante, su un'orbita di raggio *r*. La forza esercitata dal sole sul pianeta è:

$$F_{SP} = \frac{m\,v^2}{r}$$

Che, essendo $v = (2\pi r)/T$, può essere scritta:

$$F_{SP} = m\frac{4\pi^2 r^2}{T}\frac{1}{r}$$

Poiché per la terza legge $T^2 = kr^3$, dove la costante *k* è uguale per tutti i pianeti, l'equazione diventa:

$$F_{SP} = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$$

quindi:

$$F_{SP} = C\,\frac{m}{r^2}$$

con $C = 4\pi^2/k$.
Visto che C è indipendente dal pianeta considerato, possiamo concludere che la forza attrattiva del Sole è direttamente proporzionale alla massa del pianeta e inversamente proporzionale al quadrato della distanza del pianeta dal Sole.
Ispiratosi a un principio di simmetria, Newton assunse che la forza F_{PS} esercitata dal pianeta sul Sole avesse la stessa forma della forza F_{SP} esercitata dal Sole sul pianeta. Ciò poteva essere ricavato dall'espressione di F_{SP} scambiando la massa m del pianeta con la massa M del Sole e sostituendo la costante C con una costante C' da determinare:

$$F_{PS} = C'\,\frac{M}{r^2}$$

Per il principio di azione e reazione $F_{PS} = F_{SP}$ e quindi

$$C\,m = C'\,M$$

Moltiplicando l'equazione per $1/(mM)$ otteniamo:

$$\frac{C}{M} = \frac{C'}{m} = G$$

Dove G è una nuova costante misurata con una certa accuratezza per la prima volta negli esperimenti di Cavendish citati sopra, il suo valore è $G=6,67\ 10^{-11} N(m^2/kg^2)$.
Ponendo $F = F_{SP} = F_{PS}$ si ha

$$F = G\,\frac{M\,m}{r^2}$$

Questa relazione esprime la **forza gravitazionale** con cui il Sole e uno qualsiasi dei pianeti che girano intorno ad esso si attraggono reciprocamente.

La forza gravitazionale è universale

Tuttavia come dice il fisico Richard Feynman nel suo libro "La legge fisica": "*fin qui Newton non aveva detto niente di nuovo, perché aveva solo affermato due cose che Keplero aveva già detto in un linguaggio diverso: una è esattamente equivalente all'affermazione che la forza è in direzione del Sole, e l'altra è esattamente equivalente all'affermazione che la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza*".
Tuttavia Newton aveva osservato al telescopio che i satelliti di Giove ruotavano intorno ad esso, quasi come se il tutto costituisse un piccolo sistema solare, in cui i satelliti erano attratti da Giove. Allo stesso modo la Luna è attratta dalla Terra e le ruota intorno. Sembrava dunque che ogni cosa fosse attratta da ogni altra e così si giunse all'affermazione generale che ogni corpo attrae ogni altro corpo. Se è così, la Terra deve attirare la Luna come il Sole attira il pianeta. Ma è risaputo che la Terra attira ogni corpo. L'attrazione degli oggetti sulla Terra era ben conosciuta e l'idea di Newton fu che la forza che teneva la Luna in orbita fosse la stessa che attirava gli oggetti verso la Terra.
Per verificare questa intuizione Newton considerò di quanto due corpi di massa differente cadessero in un secondo verso la Terra: il primo fu una mela, il secondo la Luna. Per quanto riguardava la mela il procedimento era facile: bastava applicare la legge oraria del moto accelerato e si trovava che:

$$y_{\text{mela}} = \frac{1}{2}\,g\,t^2 = 4.9\,m$$

dove l'accelerazione di gravità si può esprimere usando la legge di gravitazione universale e la seconda legge della dinamica

$$mg = F_G \quad \Rightarrow \quad g = \frac{F_G}{m} = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

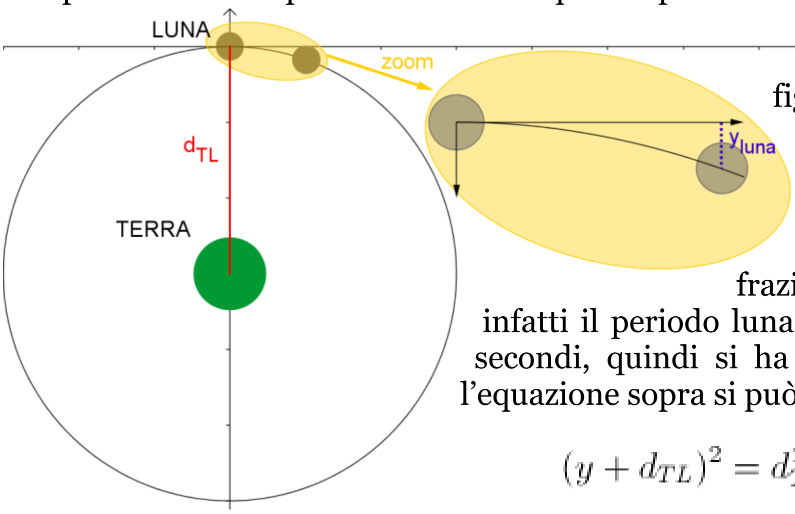
con R_T = raggio terrestre.
Si chiese poi se si può valutare di quanto la Luna "cada" in un secondo, ossia di quanto l'orbita lunare cada al di sotto della linea retta su cui si troverebbe se non si muovesse come effettivamente si muove. Il procedimento è analogo e per l'accelerazione della Luna si ha:

$$a_L = G\frac{M_T}{d_{TL}^2}$$

dove d_{TL} indica la distanza tra i centri della Terra e della Luna. Dopodiché, dal momento che la distanza Terra-Luna è circa 60 volte il raggio terrestre, l'accelerazione della mela dovrebbe essere circa 3600 volte l'accelerazione della Luna, applicando quindi la legge oraria e dividendo per 3600 si può prevedere che la caduta della Luna dovrebbe essere

$$y_{\rm luna} = \frac{1}{2}a_L\,t^2 = \frac{4.9\,m}{3600} \simeq 0.136\,cm$$ (quantità prevista secondo la legge di gravitazione)

La teoria è verificata se misurando la "caduta" della Luna in un secondo si trova un valore compatibile con quello calcolato qua sopra. Misuriamo quindi questa quantità approssimando l'orbita lunare a una circonferenza come in figura. L'equazione di tale circonferenza è



$$x^2 + (y + d_{TL})^2 = d_{TL}^2$$

Occorre però considerare che in un secondo la Luna percorre una frazione molto piccola della sua orbita, infatti il periodo lunare è circa 27,32 giorni = 2360448 secondi, quindi si ha che dopo 1 s $y << d_{TL}$. Quindi l'equazione sopra si può semplificare come segue:

$$(y + d_{TL})^2 = d_{TL}^2\left(\frac{y}{d_{TL}} + 1\right)^2 \simeq 2\,y\,d_{TL} + d_{TL}^2$$

dove nell'ultimo passaggio si è trascurato y^2 rispetto a "d_{TL}^2" e a "$2\ y\ d_{TL}$". Utilizzando questa approssimazione l'equazione della circonferenza diventa

$$y = -\frac{x^2}{2d_{TL}}$$

questa è l'equazione della parabola che meglio approssima la traiettoria della Luna in quel tratto molto limitato dell'orbita (si veda lo zoom nella figura). Quindi per ottenere la caduta della Luna, cioè $y_{\rm luna}$, occorre valutare la x dopo un secondo:

$$x = v \times (1\,s) = \frac{2\pi d_{TL}}{T} \times (1\,s) \quad \Rightarrow \quad y_{\rm luna} = \frac{2\pi^2 d_{TL}}{T^2} \times (1\,s)^2 \simeq 0.136\,cm$$

dove si è usato il periodo lunare citato sopra e come circonferenza orbitale $2\pi d_{TL}=2413402km$ (si veda per esempio http://it.wikipedia.org/wiki/Luna).
Confrontando la previsione della propria teoria con la misura si osserva un accordo eccellente. La legge di gravitazione spiega quindi il moto dei pianeti così come la caduta dei gravi e può essere applicata a qualunque coppia di corpi dotati di massa.
Dunque, come dice Feynman: *"Questo voleva dire che Newton era sulla strada giusta, perché un nuovo fatto, ossia il periodo dell'orbita della Luna e la sua distanza dalla Terra, era connesso ad un altro fatto, cioè alla lunghezza dello spazio percorso in un secondo da un corpo che cade sulla superficie della Terra"*. L'intuizione di Newton era quindi dimostrata.

La forza che tiene insieme il sistema solare agisce dunque fra tutte le entità dotate di massa: galassie, pianeti, oggetti comuni, molecole, atomi, ecc. Per questo motivo si dice che è una forza **universale**. Inoltre, l'intensità di questa forza decresce rapidamente all'aumentare della distanza tra le masse interagenti

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

La costante *G* non dipende dal materiale di cui le masse m_1 e m_2 sono costituite né da un eventuale mezzo (fluido) in cui esse siano immerse.
La forza gravitazionale è una forza radiale (o centrale), cioè agisce lungo la retta congiungente i due punti materiali, e attrattiva.
Newton riuscì a compiere un passo avanti rispetto alle precedenti teorie circa il movimenti dei pianeti e delle stelle. Copernico sostituì al sistema geocentrico elaborato da Tolomeo quello eliocentrico: tuttavia, la sua opera può essere considerata come una *descrizione* e non una *spiegazione*, in quanto egli non fu in grado di spiegare perché la terra si muovesse in quel modo.
Keplero esaminò gli stessi fenomeni in modo più semplice e completo come sistema di moti ellittici, ma non rispose alla domanda sul perché di questi moti: potremmo dunque dire che anche Keplero, così come Copernico, *descrisse*, ma non *spiegò*.
Newton con le leggi della dinamica diede il *perché* di questi fenomeni, ma anche in questo caso possiamo porci la stessa domanda: Newton *spiegò*, o semplicemente *descrisse*?
L'opera di Newton riconduce a pochi concetti fondamentali una fenomenologia molto varia e complessa attraverso una sintesi, processo in cui, usando un'espressione di Feynman, *conoscere significa capire*, perché si comprende che fenomeni apparentemente diversi hanno un meccanismo comune.
L'opera di Newton rappresenta la nascita del moderno concetto di scienza; prima di Newton infatti la teoria nasceva dalla volontà di spiegare mediante leggi i fenomeni osservati, come nel caso di Brahe e Keplero: in sintesi, l'esperimento veniva sempre prima della teoria. L'opera di Newton rappresenta invece il primo caso in cui la teoria è riuscita ad andare più "avanti" dell'esperienza: essa rappresenta infatti la prima teoria scientifica in grado di fare delle previsioni, senza basarsi su precedenti osservazioni, riprendendo quasi il motto secondo cui Tycho Brahe viveva: "*non viduri sed essere*" (non per essere visto, ma per essere). Una delle prime e più clamorose conferme della teoria della gravitazione universale elaborata da Newton fu per esempio la presenza di un nuovo pianeta, Nettuno[1]: questo fu il primo pianeta ad essere individuato tramite calcoli matematici, prima che attraverso osservazioni astronomiche.

Bibliografia:
1. Richard P. Feynman , *Che t'importa di ciò che dice la gente?*, Zanichelli, Bologna, 1989
2. Richard P. Feymnan, *La legge fisica*, Universale Bollati Boringhieri, Torino, 1971
3. Mauro Sandri, *La scoperta di Nettuno*, 2005 [http://www.mariosandri.it/scuola/ssis/Scoperta_Nettuno.pdf]
4. A.Caforio, A.Ferilli, *Il senso della fisica*, Le Monnier Scuola, Milano, 2009

[1] Le posizioni di Urano, tabulate tra il 1821 e il 1845 sfuggivano ad una previsione esatta dell'orbita. Ciò significava che o la legge di gravitazione necessitava di un qualche termine correttivo, oppure era corretta e le incongruenze osservate erano causate dalla presenza perturbatrice di un ulteriore corpo massiccio. Due studiosi tra il 1843 e il 1845, John Couch Adams e Urbain Jean Joseph Le Verrier, lavorando indipendentemente l'uno dall'altro, spiegarono queste deviazioni dalle previsioni teoriche dell'orbita di Urano attraverso l'esistenza di un altro pianeta e ne predissero la posizione. Solo dopo un paio di anni e dopo numerosi tentativi di essere ascoltato, Le Verrier riuscì a convincere un astronomo, Johann Gottfrield Galle, a puntare il proprio telescopio nel punto previsto. Si riuscì così ad osservare per la prima volta Nettuno nel 1846. La scoperta di questo nuovo pianeta del Sistema Solare fu un'ulteriore conferma della precisione e dell'accuratezza della teoria della gravitazione universale di Newton. Per la storia dettagliata di questa scoperta si veda Mario Sandri, "La scoperta di Nettuno" (2005)